Fünfundzwanzigste Fürther Mathematik-Olympiade

HERMANN GUTMANN STIFTUNG

STADT SCHWABACH
Die Goldschlägerstadt.

Fünfundzwanzigste Fürther Mathematik-Olympiade

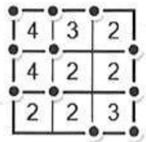
www.fuemo.de

Klassenstufe 5

Die Aufgaben der 2. Runde

Aufgabe 1 Knödelei

Anja zeichnet ein 3x3-Quadrat. Durch die waagrechten und senkrechten Linien entstehen 16 Schnittpunkte. 11 davon kennzeichnet sie willkürlich mit schwarzen „Knödeln“. Dann schreibt sie in jedes Kästchen die Anzahl der „Knödel“, die dieses jeweils an seinen Ecken enthält (siehe Abbildung).



a) Übertrage das untere Quadrat auf dein Blatt und zeichne Knödel so ein, dass die Zahlen in den kleinen Quadraten dazu passen.

0	1	2
2	3	4
3	2	3

b) Verteile in einem 3x3-Quadrat 13 Knödel so, dass die Summe aller Zahlen in den Kästchen möglichst klein wird. Begründe, warum es keine kleinere Summe geben kann.

Aufgabe 2 Abstandshalter

Die Zahlen 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7 sind so in die gegebenen 14 Felder einzutragen, dass sich zwischen jedem Paar gleicher Zahlen so viele Felder befinden, wie es ihr Ziffernwert angibt.
Beispiel: Zwischen zwei Vierern befinden sich vier Felder.
Drei dieser Zahlen sind bereits eingetragen:

				6			2		5				

a) Warum kann im 2. Feld keine 1 stehen?

b) Warum kann im 9. Feld keine 1 stehen?

c) Übertrage die 14 Felder auf dein Aufgabenblatt und trage die fehlenden Zahlen ein.

Aufgabe 3 Schachturnier

Bei einem Schachturnier haben Alois, Bea, Cora und Daniel die ersten vier Plätze belegt. Auf die Frage, welchen Platz jeder erreicht hat, gaben drei Zuschauer drei verschiedene Antworten.

(1) Alois wurde Zweiter und Daniel Dritter.

(2) Alois wurde Erster und Bea Zweite.

(3) Cora wurde Zweite und Daniel Vierter.

In jeder der Antworten ist genau eine Aussage richtig und eine falsch. Wer belegte welchen Platz?

Beachte: Zu einer vollständigen Lösung gehören die Angabe aller wesentlichen Zwischenschritte und vor allem **ausführliche Begründungen.**

Letzter Abgabetermin für die 2. Runde ist der 27.04.2017

Für jede Aufgabe *muss* ein gesondertes Blatt DIN A4 verwendet werden, das jeweils mit Namen, Klasse und Schule zu beschriften ist. Bitte hefte(t) die Lösungsblätter mit einer Büroklammer zusammen.

Den Lösungen ist folgender Abschnitt unterschrieben beizuheften:

✂ ....

Ich nehme / Wir nehmen an der 2. Runde der 25. Fürther Mathematik-Olympiade (16/17) teil.

Vorname: ______________________ Name: ______________________________ m ☐ w ☐

Klasse: ________ Schule/Ort: ____

Ich bestätige/ Wir bestätigen hiermit, alle Aufgaben selbständig gelöst zu haben.

Unterschrift(en): ____

Grade 5 Fümo

① Knödelei

Anja draws a 3×3 grid. The horizontal and vertical lines produce 16 intersection points. She labels 11 of these randomly with a dot called a "knödel" (black in the picture). She then writes the number of bordering "knödeln" in each box.

a) Draw the unlabelled grid and draw the "knödel" so that the numbers in the box are correct.

b) In a 3×3 grid, draw 13 knödeln so that the sum of the numbers in the box is minimal. Explain why there can't be a smaller sum.

② Abstandshalter

The numbers 1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,7 are written in the 14 boxes in such a way that the number of boxes between two equal numbers is equal to the number. Ex Between two "4"s there are 4 spaces. Three such numbers are in the given boxes.

a) why can't there be a 1 in field 2?

b) why can't there be a 9 in field 1?

c) Draw the table and fill in the missing numbers.

③ Schachturnier

The first four positions in a chess tournament are Alois, Bea, Cora and Daniel. When asked, "who got which place?" the spectators give three different answers.

(1) Alois is second, Daniel third

(2) Alois is first, Bea second

(3) Cora is second, Daniel is fourth

In each statement, exactly one answer is correct.

who received each place?

Fünfundzwanzigste Fürther Mathematik-Olympiade

Klassenstufe 6

Die Aufgaben der 2. Runde

HERMANN GUTMANN STIFTUNG

STADT SCHWABACH

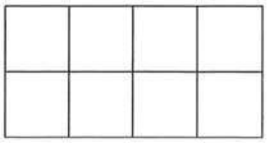
Die Goldschlägerstadt.

Fürther Mathematik-Olympiade Fünfundzwanzigste

F Ü 25 M O

www.fuemo.de

Aufgabe 1 Wer gewinnt?



Anja hat sich ein Spiel ausgedacht. Der Spielplan besteht aus einem 4x2-Rechteck mit den zugehörigen Gitterlinien. Anja (A) und Berta (B) färben nun abwechselnd jeweils ein ungefärbtes Einheitsquadrat oder ein Quadrat aus vier ungefärbten Einheitsquadraten. Wer nicht mehr färben kann, hat verloren. Anja beginnt.

a) Wer gewinnt, wenn beide optimal spielen?

b) Wer gewinnt in einem 5x2-Rechteck?

Erkläre jeweils genau, mit welcher Strategie man gewinnen kann.

Aufgabe 2 Kalenderrechnung

Zu Beginn unserer Zeitrechnung (1. Januar im Jahre 1 n. Chr.) galt der Julianische Kalender, bei dem jedes vierte Jahr, also die Jahre 4, 8, ..., Schaltjahre waren. Papst Gregor korrigierte diesen Fehler, indem er zehn Tage strich (auf Donnerstag, 4.10.1582 folgte Freitag, 15.10.1582). Zur Vermeidung weiterer Fehler legte er fest, dass alle Jahre mit Endziffern 00 Normaljahre sind, falls die Jahreszahl nicht durch 400 teilbar ist. (2000 war Schaltjahr, 1900 nicht.)

a) Wie viele Schaltjahre hat es seit Christi Geburt gegeben?

b) Welches Datum hat der 600000. Tag unserer Zeitrechnung?

c) Der 1. Februar 2017 war ein Mittwoch. Bestimme damit den Wochentag des 1. Januar 1!

Aufgabe 3 Vereinigt und verschieden

Es seien 1, 6, 11, . . . und 16, 23, 30, . . . zwei Zahlenfolgen bei denen die Differenz von zwei aufeinander folgenden Zahlen jeweils konstant ist.

Die ersten 2017 Zahlen jeder der beiden Folgen werden zu einer Zahlenmenge zusammengefasst. Wie viele verschiedene Zahlen enthält diese Menge?

Beachte: Zu einer vollständigen Lösung gehören die Angabe aller wesentlichen Zwischenschritte und vor allem **ausführliche Begründungen.**

Letzter Abgabetermin für die 2. Runde ist der 27.04.2017

Für jede Aufgabe *muss* ein gesondertes Blatt DIN A4 verwendet werden, das jeweils mit Namen, Klasse und Schule zu beschriften ist. Bitte hefte(t) die Lösungsblätter mit einer Büroklammer zusammen.

Den Lösungen ist folgender Abschnitt unterschrieben beizuheften:

✂...

Ich nehme / Wir nehmen an der 2. Runde der 25. Fürther Mathematik-Olympiade (16/17) teil.

Vorname: ______________________ Name: ______________________________ m ☐ w ☐

Klasse: ________ Schule/Ort: ____

Ich bestätige/ Wir bestätigen hiermit, alle Aufgaben selbständig gelöst zu haben.

Unterschrift(en): ____

① Wer gewinnt?

Anja thought of a game. The gameboard is a 4x2 rectangle with the grid lines. Anja (A) and Berta (B) color either an uncolored grid square or a 2x2 square, alternating in turns. The player who can't color in her next turn loses. Anja starts.

a) who wins, if they play optimally?

b) who wins, if your board is 5x2, <u>not</u> 4x2?

Explain clearly, with which strategy you can win.

② Kalenderrechnung

At the origin of our Calendar (1. January, 1 AD), we used the Julaic calendar, in which every 4th year is a "leap" year. Pope Gregor corrected this error, by removing 10 days. (after Thu 4.10.1582 came Fri 15.10.1582). To avoid further errors, he declared that all years ending in 00 are normal years, if they are <u>not</u> divisible by 400 [Ex 2000 is a leap year, 1900 <u>wasn't</u>].

a) How many leap years have there been since the birth of Christ?

b) What is the date of 600 000 in <u>our</u> Calendar?

c) Feb 1 2017 was a Wednesday. What day of the week was Jan 1. 01?

③ Vereinigt und Verschieden

1, 6, 11 ... and 16, 23, 30 .. are two number sequences that are arithmetic. The first 2017 numbers of each sequence are put together to make one big sequence.

How many <u>different</u> numbers does this sequence have?

Fünfundzwanzigste Fürther Mathematik-Olympiade

HERMANN GUTMANN STIFTUNG

STADT SCHWABACH

Die Goldschlägerstadt.

Fürther Fünfundzwanzigste Mathematik-Olympiade

F Ü 25 M O

www.fuemo.de

Klassenstufe 7

Die Aufgaben der 2. Runde

Aufgabe 1 Plus + Minus + Mal + Durch

Paul wählt zwei positive ganze Zahlen und addiert ihre Summe, ihre Differenz, ihr Produkt und ihren Quotienten. Als Ergebnis erhält er 441.

Welche Zahlen hat er gewählt? Gibt es mehrere Möglichkeiten?

Hinweis: Es gilt die Beziehung: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Aufgabe 2 n, k … ungelöst

Über zwei positive ganze Zahlen n und k werden vier Hinweise gesammelt:

(1) Die Zahl k ist ein Teiler der Zahl n+1.
(2) Die Zahl n lässt sich darstellen als n = 2k+5.
(3) Die Zahl n+k ist ein Vielfaches von 3.
(4) Die Zahl n+7k ist eine Primzahl.

Es stellt sich heraus, dass genau ein Hinweis falsch ist.
Ermittle alle möglichen Zahlen n und k.

Aufgabe 3 Kleinste Summe von Primzahlen

Lutz bildet aus den Ziffern 1, 2, …, 9 Primzahlen, wobei er jede Ziffer genau einmal verwendet. Dann addiert er diese Zahlen, z.B. 5 + 643 + 71 + 829 = 1548.

Für welche Auswahl solcher Primzahlen ist der Summenwert am kleinsten?

Gib alle Möglichkeiten an und begründe, dass es keine weitere gibt.

Beachte: Zu einer vollständigen Lösung gehören die Angabe aller wesentlichen Zwischenschritte und vor allem **ausführliche Begründungen.**

Letzter Abgabetermin für die 2. Runde ist der 27.04.2017

Für jede Aufgabe *muss* ein gesondertes Blatt DIN A4 verwendet werden, das jeweils mit Namen, Klasse und Schule zu beschriften ist. Bitte hefte(t) die Lösungsblätter mit einer Büroklammer zusammen.

Den Lösungen ist folgender Abschnitt unterschrieben beizuheften:

✂...

Ich nehme / Wir nehmen an der 2. Runde der 25. Fürther Mathematik-Olympiade (16/17) teil.

Vorname: ______________________ Name:______________________________ m ☐ w ☐

Klasse: ________ Schule/Ort: ______________________________________

Ich bestätige/ Wir bestätigen hiermit, alle Aufgaben selbständig gelöst zu haben.

Unterschrift(en):____

Fümo 7

① Plus+Minus+Mal+Durch

Paul chooses two positive whole numbers and adds their sum, difference, product and quotient. The result is 441. which numbers did he choose? Are there multiple possibilities? Hint: Use $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

② n, k ... ungelöst

Four hints are given about two positive, whole numbers n and k.

(1) k is a factor of $n+1$

(2) n can be written as $2k+5$

(3) $n+k$ is a multiple of 3

(4) $n+7k$ is prime.

One of the statements is wrong. Find the possible values of n and k.

③ Kleinste Summe von Primzahlen

Lutz uses the numbers 1, 2, 3, ... 9 to build primes and uses each digit once. He then adds these digits (numbers) together. Ex $5+643+71+829=1548$.

For which choice of primes is the sum minimal? Give all possibilities and explain why there can't be more.

Fünfundzwanzigste Fürther Mathematik-Olympiade

HERMANN GUTMANN STIFTUNG

STADT SCHWABACH
Die Goldschlägerstadt.

Fürther Mathematik-Olympiade Fünfundzwanzigste

F Ü 25 M O

www.fuemo.de

Klassenstufe 8

Die Aufgaben der 2. Runde

Aufgabe 1 Viereck im Halbkreis

Über der Strecke [AB] mit Mittelpunkt M wird der Thaleskreis konstruiert. Der Punkt C liegt auf dem Thaleskreis. Das Lot von M auf die Strecke [AC] schneidet den Thaleskreis im Punkt D und die Strecke $[AC]$ im Punkt N.

a) Zeige: $\overline{AD} = \overline{DC}$

b) Zeige: BD ist Winkelhalbierende des Winkels $\angle CBA$

c) Wie groß sind die Winkel des Vierecks ABCD in Abhängigkeit vom Winkel $\alpha = \angle BAC$

Aufgabe 2 Fußballturnier

An einem Fußballturnier nehmen sechs Mannschaften teil. Es spielt „Jeder gegen Jeden" und zwar genau einmal. Der Sieger bekommt jeweils 3 Punkte, der Verlierer keinen. Bei einem Unentschieden erhalten beide Teams je einen Punkt.
Können die Teams am Ende Punktestände haben, die sechs aufeinander folgende Zahlen sind?

Aufgabe 3 2017 als Summe

Die Zahl 2017 soll als Summe von mindestens zwei aufeinander folgenden positiven ganzen Zahlen dargestellt werden.
Gib alle derartigen Zerlegungen an und begründe, dass es keine weitere gibt.

Beachte: Zu einer vollständigen Lösung gehören die Angabe aller wesentlichen Zwischenschritte und vor allem **ausführliche Begründungen.**

Letzter Abgabetermin für die 2. Runde ist der 27.04.2017

Für jede Aufgabe *muss* ein gesondertes Blatt DIN A4 verwendet werden, das jeweils mit Namen, Klasse und Schule zu beschriften ist. Bitte hefte(t) die Lösungsblätter mit einer Büroklammer zusammen.

Den Lösungen ist folgender Abschnitt unterschrieben beizuheften:

✂..

Ich nehme / Wir nehmen an der 2. Runde der 25. Fürther Mathematik-Olympiade (16/17) teil.

Vorname: ______________________ Name:______________________________ m ☐ w ☐

Klasse: ________ Schule/Ort: ______________________________________

Ich bestätige/ Wir bestätigen hiermit, alle Aufgaben selbständig gelöst zu haben.

Unterschrift(en):____

FüMO 8

① Viereck im Halbkreis

The line segment AB with midpoint M is used as the diameter of a circle. The point C lies on the circle. The perpendicular from M to AC cuts the circle in point D and AC in the point N.

a) Show that $AD = DC$
b) Show BD is the angle bisector of $\angle CBA$.
c) How big are the angles of the quadrilateral ABCD in relation to $\varphi = \angle BAC$?

② Fussballturnier

6 teams participate in a soccer tournament. Every team plays every other team once. The winner gets 3 points, the loser none. In a tie, each team gets 1 point. Can, at the end of the tournament, the teams have points that are six consecutive numbers?

③ 2017 als Summe

The number 2017 should be written as the sum of at least two consecutive numbers. (positive) Give all the possibilities and show that there can't be any others.